



TITLE:

定幅曲線と凸面鏡(部分多様体の微分幾何学)

AUTHOR(S):

柳本, 浩

CITATION:

柳本, 浩. 定幅曲線と凸面鏡(部分多様体の微分幾何学). 数理解析研究所講究録 1983, 489: 54-58

ISSUE DATE:

1983-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103502>

RIGHT:

定幅曲線と凸面鏡

岩手医科大学教養部

柳本 浩

(Hiroshi Yanamoto)

問題 平面内の卵形線 M を凸面鏡と見なし、 M の内部に光源 L を置く。そのとき、

(1) “光源 L から出た光が凸面鏡 M に二度反射されて光源 L に戻る。” (#)

ような光線は少なくとも何本あるか？

(2) “光源 L から出たすべての光線が凸面鏡 M に二度反射されて光源 L に戻る” (##)

為の条件は何か？

準備 光源 L に関する M の波面 (Wavefront of M relative to L)

$W = \{L_p; \forall p \in M, \ y = 2\langle x, e_2 \rangle, \ e_2 > e_1\}$ ととり、

M の各点 P における曲率を $\kappa (> 0)$ とすれば、 W の点 L_p

における曲率 $\bar{\kappa}$ は、

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{r} - \frac{P}{2r^3 \cdot \kappa}$$

で与えられる。ここで r は、

$$r = -\frac{\langle y, y \rangle}{2\langle y, \kappa \rangle}$$

を満たす。(図1を参照)

(J.W. Brue et al. [1], P664).

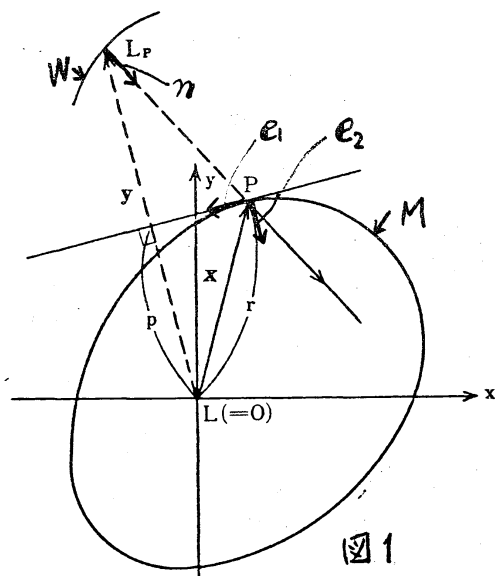


図1

〈注〉凸面鏡 M の光源 L に関する波面は卵形線とは限らない。例えば、 O を中心とし、半径1の円を凸面鏡とし、光源 L を $OL < \frac{1}{2}$ にとれば、 W は卵形線 (oval epitrochoid) であるが、 $\frac{1}{2} \leq OL < 1$ のときは、 $\pi \leq 0$ の点 L_p がある。

解答 問題(1)に関して、凸面鏡 M の L に関する波面 W が卵形線となる場合、(井)を満たす光線の一回目の反射光線は W の重法線 (double normal) になっているから、

N. H. Kuiper ([2])の定理より、

Prop. 1 凸面鏡 M の光源 L に関する波面 W が卵形線ならば、光源 L から出て二度反射され L に戻る光線は少なくとも二本ある。

問題(2)に関して、次の〈例〉に注目しよう。

〈例〉楕円曲線 M を凸面鏡とし、焦点の1つ F に光源 L を置けば、(井)を満たす。このとき、波面 W はもう一つの焦点 F' を中心とする半径 $\overline{FF'}/e$ (e : 離心率) の円である。さて、

Prop. 2 凸面鏡 M の光源 L に関する波面 W が卵形線とする。(井)を満たすならば、 W は定幅曲線である。

なぜならば、 L から出たすべての光線の一回目の反射光線が波面 W の任意の重法線になるからである。

逆に、

Prop. 3 W を定幅の卵形線とし、 W 内に定点 L をとる。

W の L からの位置ベクトル y が

$$\frac{1}{\kappa} > r = -\frac{\langle y, y \rangle}{2\langle y, n \rangle} \quad (>0)$$

を満たすならば、

$M: x = y + r n$ により、 L を光源とする凸面鏡 M は (H) を満たし、 M の波面は W と一致する。

<例1> 解析的ルローの三角形 W 内に光源 $L=O=(0,0)$ をとる。

$$W: y = (h \cos \theta - h' \sin \theta, h \sin \theta + h' \cos \theta),$$

$$\text{ここで、} h = a + b \cos 3\theta \quad (0 < 8b < a).$$

$$\text{これより、} n = -(\cos \theta, \sin \theta)$$

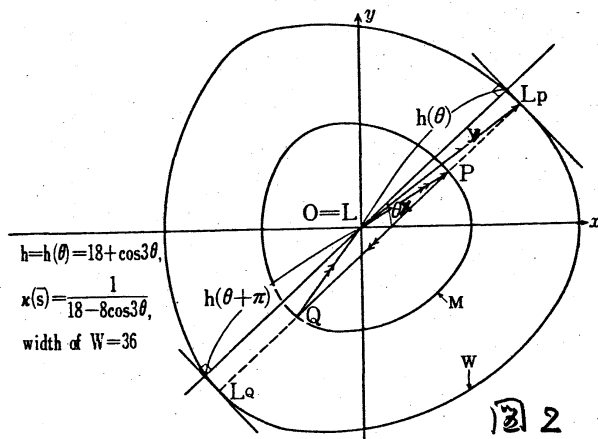
$$\bar{\kappa} = 1/(h^2 + h'^2) = 1/(a - 8b \cos 3\theta) > 0 \text{ を得る。}$$

今、 W を $h = a + b \cos 3\theta$ ($0 < 17b < a$) にとり、

$$M \text{ を } M: x = y + r n$$

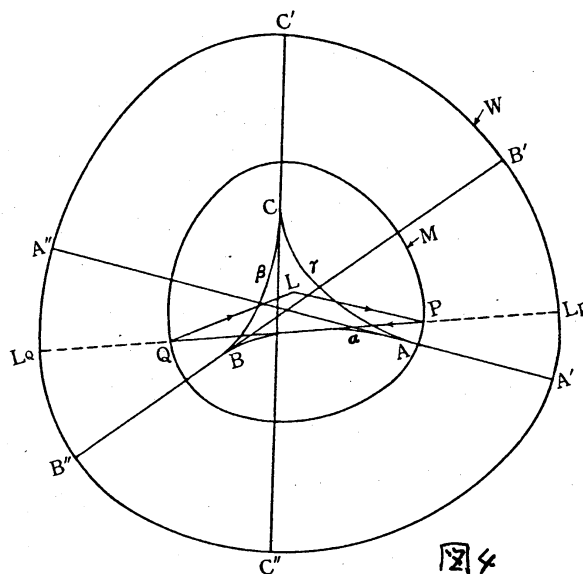
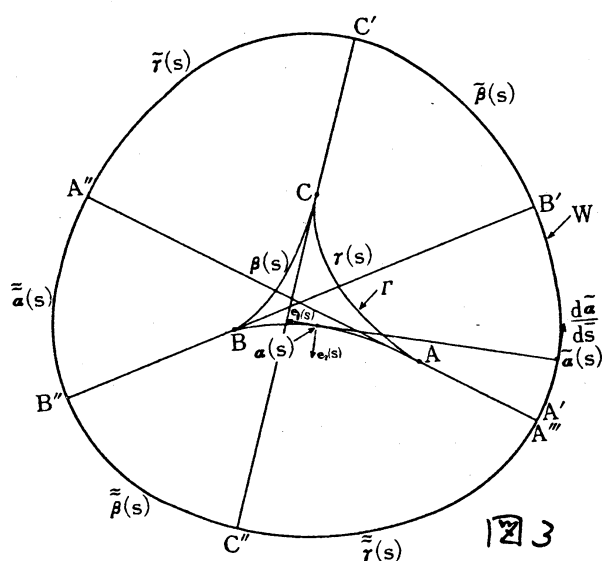
$$r = -\langle y, y \rangle / 2\langle y, n \rangle = (h^2 + h'^2) / (2h)$$

とすれば、 $\kappa > 0$ を得る。(図2を参照)



<例2> 図3のような、凸状の部分弧 \widehat{AB} , \widehat{BC} , \widehat{CA} で作られる閉曲線 Γ の伸開線を W とすれば、 W は定幅曲線である。今、 Γ 内に光源 L をとり、 W の L に関する位置ベクトル y が、 $1/\kappa > r = -\langle y, y \rangle / 2\langle y, n \rangle > 0$ を満たすように AA' を十分大きくとれば、(##)を満たす凸面鏡 $M: x = y + r n$ を得る。かつ、 M の反射光線によって出来るcuspsは Γ に一致する。

(図3, 4参照)



関連事項

(i) 撞球問題に関しては、高橋[4]及び、次の定理が知られている (Birkhoff[3] 参照)。

Prop (Poincaré) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を強凸状完閉 C^∞ -領域とする。
 $2m \leq n$ はる各自然数 m, n に対して、 m を回転数, n を反射数とする閉測地線の集合 $\mathcal{P}(m, n)$ は空でない。

- (ii) 問題(1), (2) は“定幅曲面と凸面鏡”と曲面に拡張できる。

文献

- [1] J.W. Bruce, P.J. Giblin and C.G. Bibson; On caustics of plane curves, *American Math Monthly* Vol 1, 88, No. 9, 1981, p 651 - 667
- [2] N.H. Kuiper; Double normals of convex bodies.
- [3] Birkhoff; *Dynamical systems*, Colloq. Publ., Vol IV, Amer. Math. Soc., 1927
- [4] 高橋秀俊著; 数理と現象 (岩波書店) 1975,
楕円に反射する光線 (P113-120)
- [5] H. Yanamoto; Some Remarks on Geometrical Optics, *Ann. Dep. of Iwate M. Univ.* (No. 17), p 65 ~ 92, 1982